

DOI: 10.16285/j.rsm.2020.1880

三维数值流形法覆盖系统生成算法研究

杨石扣¹, 任旭华², 张继勋², 艾华东¹

(1. 江西理工大学 土木与测绘工程学院, 江西 赣州 341000; 2. 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘 要: 覆盖系统生成效率低是当前制约三维数值流形法在大型实际工程中应用的瓶颈问题。通过改进三维覆盖系统的生成算法, 提出了改进的布尔交运算生成三维覆盖系统的算法, 并采用 C++ 语言编写了相应的程序。根据数学网格与物理域的拓扑几何关系, 确定采用传统布尔交运算还是由数学网格直接生成流形块体, 并对生成的流形块体进行三维块体有效性检查, 满足要求后即可生成新的三维流形单元, 进而生成所有前处理三维覆盖系统。选取两个简单算例和一个边坡工程问题来说明所提方法的可行性和计算程序的正确性, 并通过对比分析说明方法的计算效率。计算结果表明, 改进的布尔交运算比传统布尔交运算更高效; 随着网格密度的增加, 生成一个单元的平均耗时逐渐减少; 随着物理域边界复杂程度增加, 所提方法计算效率逐渐降低。为今后采用数值流形法进行结构分析奠定基础, 具有较强的实际应用价值。

关 键 词: 数值流形法; 覆盖系统; 布尔交运算; 三维流形单元; 数学网格

中图分类号: O241, TU457

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2022) 增刊 1-0633-08

Study on algorithm of cover system generation in three-dimensional numerical manifold method

YANG Shi-kou¹, REN Xu-hua², ZHANG Ji-xun², AI Hua-dong¹

(1. School of Civil and Surveying & Mapping Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, Jiangxi 341000, China;

2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: The low efficiency of cover system generation is a bottleneck problem that restricts the application of 3D numerical manifold method in large-scale practical engineering. By improving the generation algorithm of 3D cover system, an improved algorithm of generating 3D cover system based on Boolean intersection operation is proposed, and the corresponding program with C++ is developed. According to the topological geometric relationship between mathematical mesh and physical domain, the manifold block is generated by the conventional Boolean intersection operation or the mathematical mesh directly. The manifold elements are generated when new blocks satisfy the validity, and then all preprocessing 3D cover systems are generated. Two simple examples and a slope engineering problem are selected to illustrate the feasibility of the present method and the correctness of the calculating program, and the calculating efficiency of the present method is also analyzed by comparison. The results show that the improved Boolean intersection operation is more efficient than the conventional Boolean intersection operation. With the increase of mesh density, the average generating time consumption of one element decreases gradually. With the increasing complexity of physical domain's boundary, the computational efficiency of the present method is gradually reduced. It provides a foundation, with strong practical application value, for future structural analysis with the numerical manifold method.

Keywords: numerical manifold method; cover system; Boolean intersection operation; three-dimensional manifold element; mathematical mesh

1 引 言

数值流形法 (numerical manifold method, 简称

NMM) 是 Shi^[1]于 20 世纪 90 年代初, 在关键块体理论 (key block theory, 简称 KBT) 和非连续变形分析 (discontinuous deformation analysis, 简称 DDA)

收稿日期: 2020-12-17

修回日期: 2021-03-04

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No.51739006, No.U1765204); 中国博士后科学基金项目 (No.2017M611678); 江西省教育厅科学技术研究项目 (No.GJJ190500); 赣州市科技计划项目 (赣市科发[2019]60 号)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(51739006, U1765204), the China Postdoctoral Science Foundation (2017M611678), the Science and Technology Research Project of Jiangxi Provincial Department of Education(GJJ190500) and the Project of Ganzhou's Science and Technology Plan([2019]60).

第一作者简介: 杨石扣, 男, 1985 年生, 博士, 副教授, 主要从事水工地下结构工程研究。E-mail: yangshikou@126.com

基础上提出的一种数值分析方法,运用有限覆盖技术和双重覆盖系统(数学覆盖和物理覆盖)统一处理连续和非连续变形问题。凭借这些独特优势,近年来数值流形法在二维领域已经取得了广泛的应用。如:裂纹扩展^[2-5]、开挖卸荷^[6]、冲击破坏^[7]、渗流^[8-10]、功能梯度材料^[11]和非线性分析^[12]等。在三维领域,由于受到三维流形单元生成^[13-15]和接触判定算法^[16]的制约,应用相对较少^[17-19]。本文主要讨论三维流形单元的生成效率问题,覆盖系统生成效率低是当前制约三维数值流形法在大型实际工程中应用的瓶颈问题。

二维流形单元的生成已经取得了较多的研究成果。张湘伟等^[20]采用面向对象设计思想完成了覆盖系统的自动剖分。曹文贵等^[21-22]研究了两套覆盖系统的自动编号方法。蔡永昌等^[23]则从覆盖系统的定义出发,不作任何假设,实现了流形单元和两套覆盖的自动生成和编号。陈刚等^[24]基于有向图遍历理论生成覆盖系统。韩有民等^[25]通过设置悬挂节点,提出裂纹扩展时物理覆盖和流形单元的生成算法。徐栋栋等^[26]针对几何形态保持固定不变的模型,阐述了物理覆盖和接触环路生成的整个过程。近期,苏海东等^[27]针对有限元法网格难以精确几何建模和人工工作量大等问题,提出了一种二维任意网格划分方法。张友良等^[28]基于分布式内存编程模式,提出了数值流形法覆盖系统和流形单元的并行

生成算法。

三维流形单元生成的研究成果较少。李海枫等^[13]对流形切割法形成三维流形单元进行了详细研究,并且取得了较好的成果,但未考虑非贯通结构面体的影响。杨石扣等^[14]借鉴张奇华等^[29-30]有关拓扑“有向性”和块体加与减运算的概念,提出了基于布尔交运算的三维流形单元生成算法,算法虽然具有一般性,但是计算较为耗时,在网格密度较大时尤为明显。针对这一不足,本文在此基础上提出了改进的布尔交运算生成三维覆盖系统和流形单元算法。

2 三维覆盖系统和流形单元

三维数值流形法主要包括三维数学覆盖、三维物理覆盖和三维流形单元等 3 个基本概念。数学覆盖由一系列有限重叠覆盖组成,并设置权函数。物理覆盖由数学覆盖和物理域(见图 1(a))决定,并设置位移函数。三维数学覆盖网格的形状可以为四面体、六面体或其他多面体网格,如图 1(b)中的数字编号 1~27,每个编号代表一个六面体的数学覆盖网格,不失一般性,本文主要选取六面体网格。图 1(b)中的数学覆盖,在考虑物理边界后形成的物理覆盖如图 1(c)所示。物理覆盖的公共区域被定义为流形单元,如图 1(d)所示,对应的物理覆盖为 P_{28} 、 P_2 、 P_5 、 P_{29} 、 P_{31} 、 P_{11} 、 P_{14} 和 P_{32} ,如图 1(e)所示。

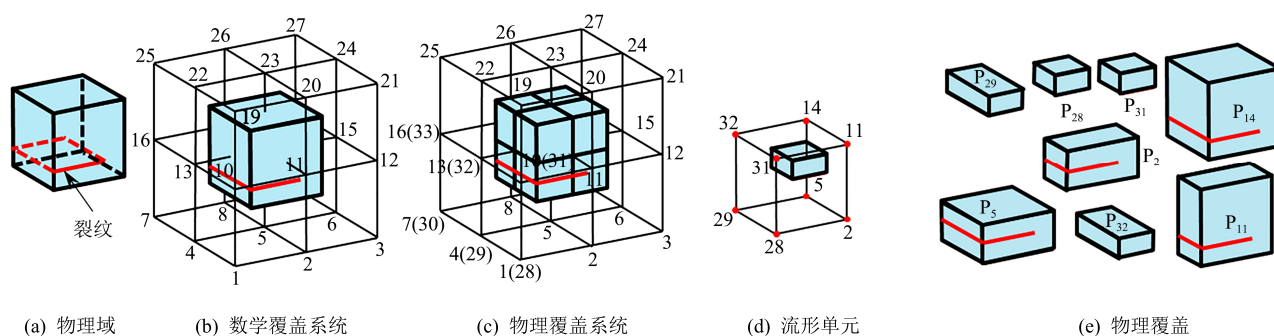


图 1 三维数值流形法的覆盖系统和流形单元

Fig.1 Covers and manifold element for 3D numerical manifold method

3 改进布尔交运算及覆盖系统生成

3.1 改进的块体布尔交运算

杨石扣等^[14]通过块体间的布尔交运算实现三维覆盖系统和流形单元的生成。块体布尔交运算通过点、有向边、有向环、有向面和有向壳等概念求两个块体公共部分,并将公共部分作为新的块体集,形成的块体可以是凹形体、空心体和含退化有向壳

的体^[31]。两个块体的布尔交运算需要遍历所有两组块体,比较耗时,若能够判定某块体 1 完全位于另一块体 2 内,则布尔交运算得到的块体就是块体 1,不再需要进行点、有向边、有向环、有向面和有向壳等复杂的布尔交运算,这一思路简化了计算算法,提高了计算效率。此步的关键之处在于如何确定块体 1(数学网格)完全位于另一块体 2(物理域)内,这里提出一种简化方法(图 2(a)),算法如下:

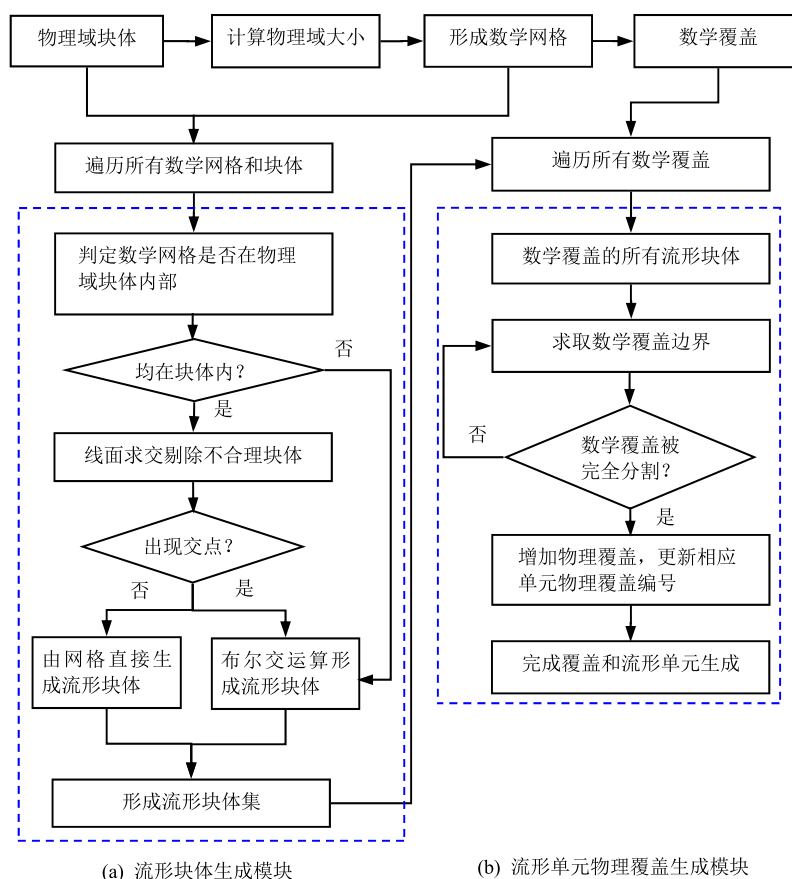


图 2 基于改进布尔交运算的三维流形单元生成流程图

Fig.2 Flow chart of generation of 3D manifold element based on the extended Boolean intersection operation

(1) 遍历所有数学网格和块体，完成遍历转步骤 (5)，否则转步骤 (2)；

(2) 若块体 1 的顶点均在块体 2 内，则转步骤 (3)，否则转步骤 (4)；

(3) 若块体 2 含退化壳，且块体 1 的棱与块体 2 的退化壳线面求交运算无合理交点，则块体 1 完全在块体 2 内，块体 1 可以直接作为流形块体，转步骤 (1)，否则转步骤 (4)；若块体 2 无退化壳，则块体 1 完全在块体 2 内，块体 1 可以直接作为流形块体，转步骤 (1)，否则转步骤 (4)；

(4) 采用传统布尔交运算^[14]得到流形块体，转步骤 (1)。

(5) 完成流形块体生成。

在进行改进的布尔交运算过程中，生成的流形块体要进行有效性检查，以保证结果的正确性，如 Shi^[32]提出的拓扑性检查和体积总和检查、张奇华等^[29]提出的“封闭性”原理、李海枫等^[13]采用的 Euler-Poincare 公式和杨石扣等^[14]采用的检查方法，本文采用杨石扣等^[14]使用的检查方法。

3.2 三维覆盖系统和流形单元生成

由流形单元的定义可知，采用改进的布尔交运

算生成三维覆盖系统和流形单元可分为 3 步(图 2)：

(1) 计算物理域(图 3(a))范围，在此范围内生成数学网格和数学覆盖(图 3(b))。网格分布区域要覆盖整个物理域，其分布可以为均匀分布或自由控制疏密，其形状可以为四面体、六面体或其他多面体，取决于计算需要，将数学网格的顶点转化为数学覆盖的参考点。

(2) 根据数学网格与物理域的位置关系，确定使用传统布尔交运算^[14]或 3.1 节提出的改进布尔交运算生成流形块体(图 3(c))。

(3) 确定数学覆盖是否被物理域边界完全分割，若完全分割，则增加物理覆盖和更新编号，如图 2(b)所示。

4 算例和计算结果

采用 C++语言编制了基于改进布尔交运算的三维覆盖系统和流形单元生成程序，并选取 3 个算例来说明文中方法的可行性和计算效率。

4.1 简单多面体

此算例为一个六面体(见图 4(a))，采用 2×2×2、4×4×4、8×8×8、16×16×16、32×32×32 等 5 种数学

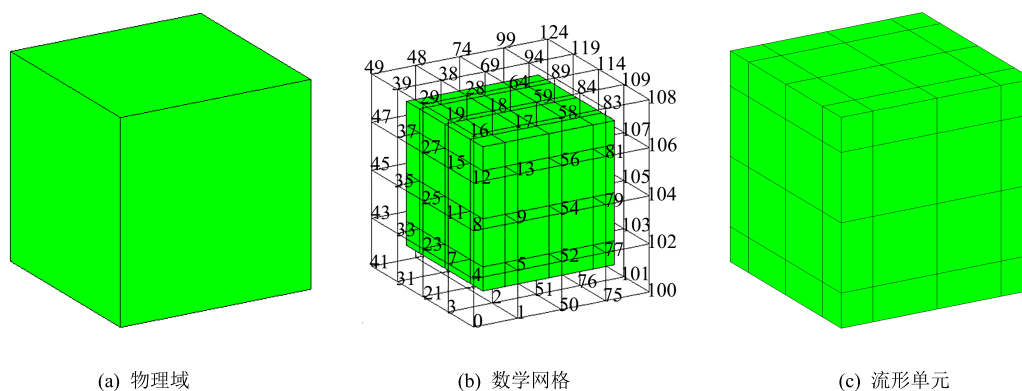


图3 改进的布尔交运算生成覆盖系统和流形单元

Fig.3 Generation of covers and manifold elements with the extended Boolean intersection operation

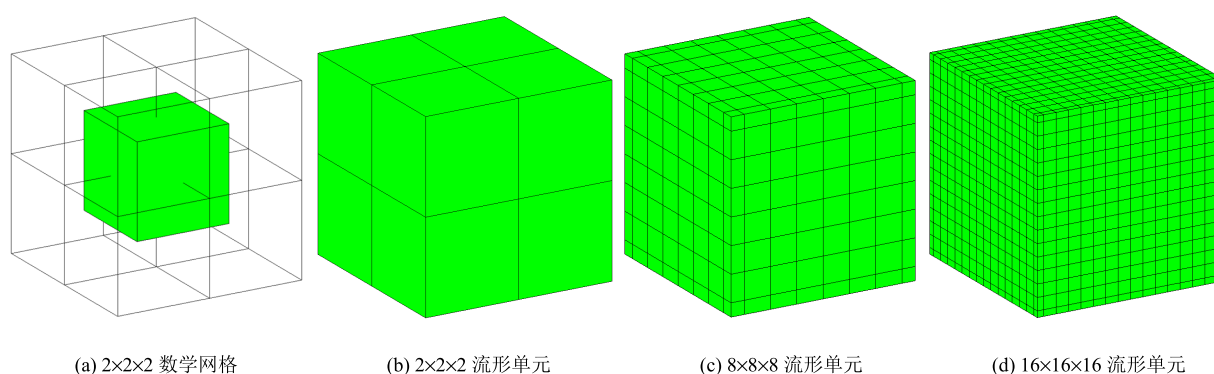


图4 简单多面体的数学网格和流形单元

Fig.4 Mathematical meshes and manifold elements for a simple polyhedron

网格, 分别形成 8、64、512、4 096 和 32 768 个流形单元, 如图 4 所示。将单元数目 n 的对数 $\lg n$ 与归一化时间因子 $t_1 = t/t_{\max}$ ($t_{\max}$ 为 10 组时间数据中最大数值, t 为计算耗时) 间的关系绘于图 5。由此可见, 改进的布尔交运算比传统布尔交运算更高效, 耗时更少, 尤其随着网格密度的增加, 效率提高更加明显。将单元数目 n 的对数 $\lg n$ 与归一化时间因子 $t_2 = (t/n)/(t/n)_{\max}$ 间的关系绘于图 6。由此可见, 随着网格密度的增加, 生成一个单元的平均耗时逐

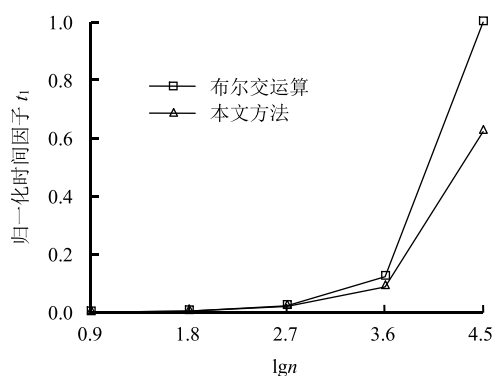
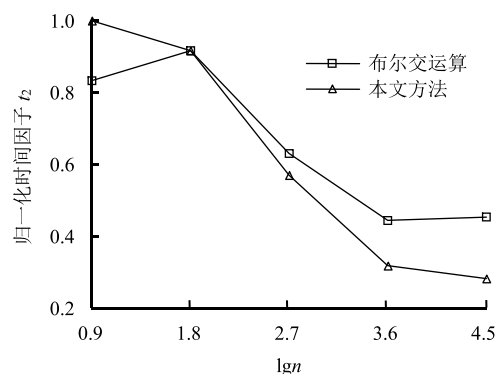


图5 不同网格密度下的时间因子

Fig.5 Time factors for various mesh densities

图6 每个单元不同网格密度下的平均时间因子
Fig.6 Average time factors of each element for various mesh densities

渐减少, 改进的布尔交运算耗时比传统布尔交运算耗时更少、更高效; 当网格密度较大时, 本文方法与传统方法生成一个单元的平均耗时都各自趋向于一个稳定数值。

4.2 内部含结构面的块体

此算例在算例1的基础上逐渐引入3个结构面, 不失一般性, 取3个互相垂直简单结构面说明结构面的影响(见图7), 采用 $16 \times 16 \times 16$ 数学覆盖网格。

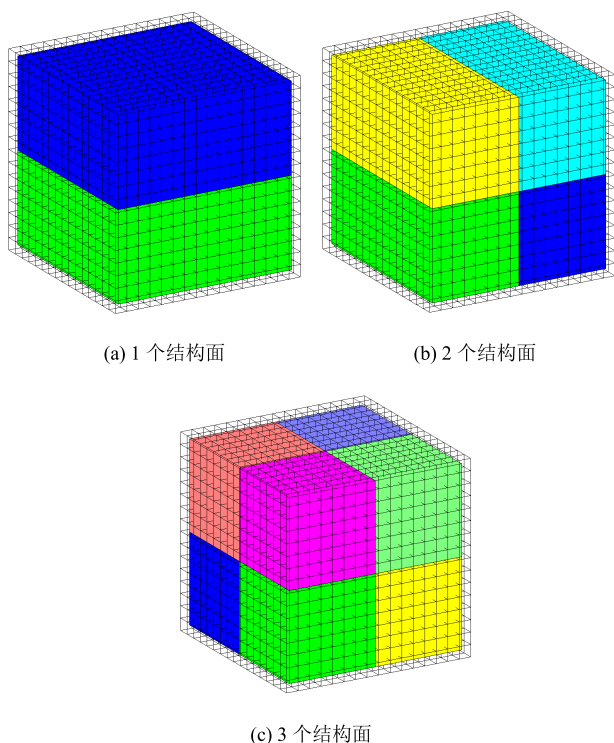


图 7 内部含结构面的块体
Fig.7 A block with inner discontinuities

将逐渐引入的结构面数目 n_D 与归一化时间因子 $t_3 = t/t_{\max}$ ($t_{\max}$ 为 8 组时间数据中最大数值) 间的关系绘于图 8。由此可见, 随着块体内部结构复杂程度增加, 传统布尔交运算方法和文中方法耗时逐渐增加, 计算效率逐渐降低。

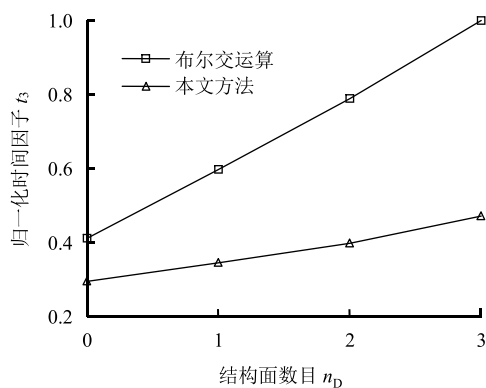


图 8 不同结构面数目下的时间因子
Fig.8 Time factors for various numbers of discontinuities

4.3 边坡工程实例

此算例为某边坡工程 (见图 9(a)), 根据边坡工程地质资料, 影响边坡稳定的结构面主要有 4 个。采用 $28 \times 2 \times 19$ (工况 1)、 $28 \times 4 \times 19$ (工况 2)、 $28 \times 8 \times 19$ (工况 3) 和 $28 \times 16 \times 19$ (工况 4) 等 4 种数学网格, 分别形成 928、1 856、3 712 和 7 424 个流形单元, 如图 9(a)~9(d)所示。将单元数目 n 的对数 $\lg n$ 与归

一化时间因子 $t_1 = t/t_{\max}$ ($t_{\max}$ 为 8 组时间数据中最大数值) 间的关系绘于图 10。由此可见, 本文改进的布尔交运算比传统布尔交运算更高效, 耗时更少, 尤其随着网格密度的增加, 效率提高更加明显。将单元数目 n 的对数 $\lg n$ 与归一化时间因子 $t_2 = (t/n)/(t/n)_{\max}$ 间的关系绘于图 11。由此可见, 随着网格密度的增加, 生成一个单元的平均耗时逐渐减少, 改进的布尔交运算耗时比传统布尔交运算耗时更少、更高效; 当网格密度较大时, 本文方法与传统方法生成一个单元的平均耗时都各自趋向于一个稳定数值。

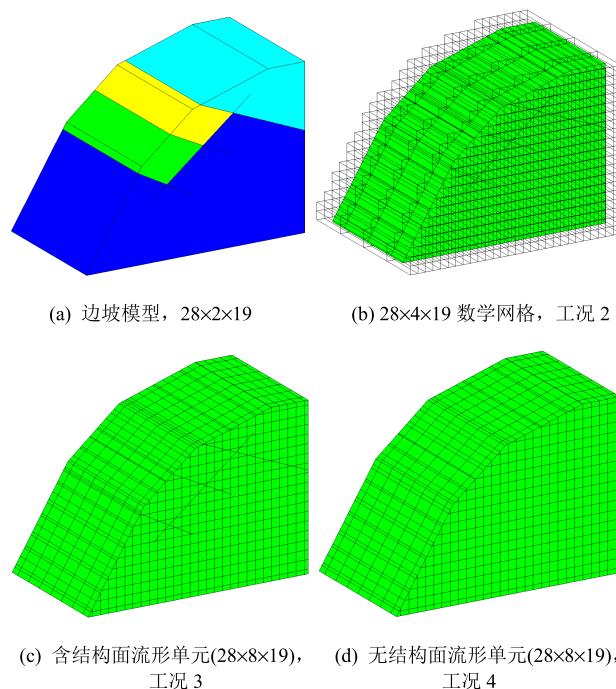


图 9 边坡的数学网格和流形单元
Fig.9 Mathematical meshes and manifold elements for a slope

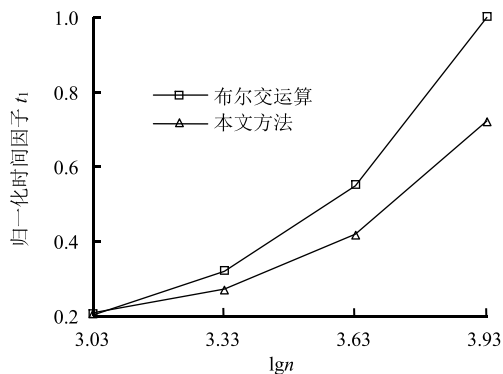


图 10 不同网格密度下的时间因子
Fig.10 Time factors for various mesh densities

为了去除厚度方向边界影响, 用工况 2、工况 3 和工况 4 的耗时减去工况 1 的耗时, 再求取相应的

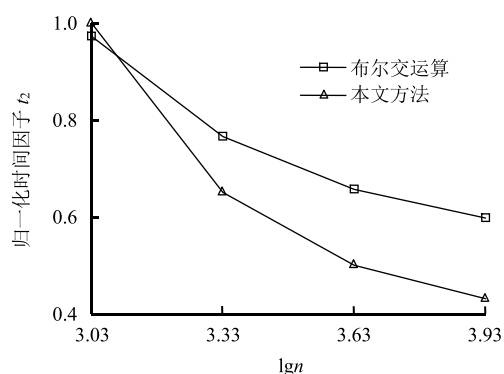


图 11 每个单元不同网格密度下的平均时间因子

Fig.11 Average time factors of each element for various mesh densities

每个内部单元不同网格密度下的平均时间因子,如图 12 所示。由图可知,每个内部单元生成的平均耗时随网格密度变化较小,传统方法变化区间为 0.545~0.560,本文方法变化区间为 0.303~0.351,与传统布尔交运算计算结果相比,本文方法大约可以节省 36%~46%的时间,小于图 11 中考虑厚度方向边界影响的数值,主要原因为边界单元肯定会进行传统布尔交运算,比较耗时,降低了计算效率。为了进一步说明块体内部结构面的影响,采用 28×2×19 和 28×8×19 数学网格重新覆盖无内部结构面的边坡。计算可得其每个内部单元的平均时间因子为 0.117,只为有结构面情况的 1/3 左右,说明物理域边界多少和复杂情况对流形单元和覆盖系统的生成效率影响较大。

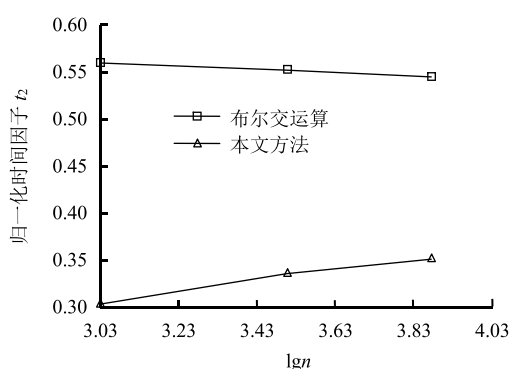


图 12 每个内部单元不同网格密度下的平均时间因子

Fig.12 Average time factors of each inner element for various mesh densities

5 结 论

(1) 3 个算例的计算结果表明了文中方法的可行性和有效性。随着网格密度的增加,生成一个单元的平均耗时逐渐减少,改进的布尔交运算耗时比

传统布尔交运算耗时更少、更高效;当网格密度较大时,本文方法与传统方法生成一个单元的平均耗时都各自趋向于一个稳定数值。

(2) 边坡内部单元生成的平均耗时随网格密度变化较小,传统方法变化区间为 0.545~0.560,本文方法变化区间为 0.303~0.351,与传统布尔交运算计算结果相比,本文方法大约可以节省 36%~46%的时间。

(3) 物理域边界附近网格肯定会采用传统布尔交运算计算流形单元,比较耗时,降低了文中算法的计算效率,故而物理域边界多少和复杂情况对流形单元和覆盖系统的生成效率影响较大。

参 考 文 献

- [1] SHI G H. Manifold method of material analysis[C]// Proceeding, Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing. Minneapolis. Minnesota: [s. n.], 1991: 57-76.
- [2] 王水林, 葛修润. 流形元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 405-410.
WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1997, 16(5): 405-410.
- [3] 杨石扣, 任旭华, 张继勋. 基于覆盖细化的数值流形法及其在裂纹扩展中的应用[J]. 工程力学, 2013, 30(11): 47-54.
YANG Shi-kou, REN Xu-hua, ZHANG Ji-xun. Cover based refinement in the numerical manifold method and its application in crack propagation[J]. **Engineering Mechanics**, 2013, 30(11): 47-54.
- [4] 徐栋栋, 杨永涛, 郑宏, 等. 基于数值流形法的重力坝多裂纹扩展研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(12): 1001-1010.
XU Dong-dong, YANG Yong-tao, ZHENG Hong, et al. Study of multiple crack growth of gravity dam based on numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(12): 1001-1010.
- [5] YANG Y T, SUN G, ZHENG H, et al. A four-node quadrilateral element fitted to numerical manifold method with continuous nodal stress for crack analysis[J]. **Computers & Structures**, 2016, 177: 69-82.
- [6] 焦健, 乔春生, 徐干成. 开挖模拟在数值流形方法中的

- 实现[J]. 岩土力学, 2010, 31(9): 2951-2957.
- JIAO Jian, QIAO Chun-sheng, XU Gan-cheng. Simulation of excavation in numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(9): 2951-2957.
- [7] 刘红岩, 王贵和. 节理岩体冲击破坏的数值流形方法模拟[J]. 岩土力学, 2009, 30(11): 3523-3527.
- LIU Hong-yan, WANG Gui-he. Simulation of impact failure of jointed rock mass by numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(11): 3523-3527.
- [8] 李伟, 郑宏. 基于数值流形法的渗流问题边界处理新方法[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(10): 1867-1873.
- LI Wei, ZHENG Hong. New boundary treatment for seepage flow problem based on numerical manifold method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2017, 39(10): 1867-1873.
- [9] 冯强, 郑宏. 渗流转角奇异问题的数值流形单元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(增刊 2): 3892-3901.
- FENG Qiang, ZHENG Hong. Turning point singularity problem in seepage by numerical manifold method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2017, 36(Suppl.2): 3892-3901.
- [10] YANG Y, TANG X, ZHENG H, et al. Hydraulic fracturing modeling using the enriched numerical manifold method[J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2018, 53: 462-486.
- [11] 胡国栋, 张慧华, 谭育新. 功能梯度材料稳态热传导问题的数值流形方法研究[J]. 应用力学学报, 2017, 34(2): 311-317, 406.
- HU Guo-dong, ZHANG Hui-hua, TAN Yu-xin. Numerical manifold study of steady heat conduction problems in functionally graded materials[J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 2017, 34(2): 311-317, 406.
- [12] 周小义, 邓安福. 岩土体非线性分析的数值流形方法[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(2): 298-302.
- ZHOU Xiao-yi, DENG An-fu. Numerical manifold method of nonlinear analysis for rock and soil mass[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(2): 298-302.
- [13] 李海枫, 张国新, 石根华, 等. 流形切割及有限元网格覆盖下的三维流形单元生成[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(4): 731-742.
- LI Hai-feng, ZHANG Guo-xin, SHI Gen-hua, et al. Manifold cut and generation of three-dimensional manifold element under FE mesh cover[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(4): 731-742.
- [14] 杨石扣, 任旭华, 张继勋. 基于布尔交运算的三维流形单元生成研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(9): 2706-2711, 2720.
- YANG Shi-kou, REN Xu-hua, ZHANG Ji-xun. Generation of three-dimensional manifold element based on Boolean intersection operations[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(9): 2706-2711, 2720.
- [15] 柯锦福, 王水林. 三维数值流形法块体切割技术研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(10): 3473-3480.
- KE Jin-fu, WANG Shui-lin. A study on the block-cutting technique of three-dimensional numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(10): 3473-3480.
- [16] HE L, AN X M, ZHAO Z Y. Development of contact algorithm for three-dimensional numerical manifold method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2014, 97(6): 423-453.
- [17] 姜清辉, 邓书申, 周创兵. 有自由面渗流分析的三维数值流形方法[J]. 岩土力学, 2011, 32(3): 879-884.
- JIANG Qing-hui, DENG Shu-shen, ZHOU Chuang-bing. Three-dimensional numerical manifold method for seepage problems with free surfaces[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(3): 879-884.
- [18] 刘登学, 张友良, 谭飞, 等. 六面体覆盖的高阶数值流形方法的探讨[J]. 岩土力学, 2014, 35(增刊 2): 662-666, 675.
- LIU Deng-xue, ZHANG You-liang, TAN Fei, et al. Discussion on high-order numerical manifold method based on hexahedron element[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(Suppl.2): 662-666, 675.
- [19] 杨石扣, 张继勋, 任旭华, 等. 三维数值流形法在裂纹扩展中的应用研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(10): 3017-3025.
- YANG Shi-kou, ZHANG Ji-xun, REN Xu-hua, et al. Application of three-dimensional numerical manifold method to crack propagation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(10): 3017-3025.
- [20] 张湘伟, 蔡永昌, 廖林灿. 数值流形方法物理覆盖系统的自动剖分[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2000,

- 23(1): 28-31.
- ZHANG Xiang-wei, CAI Yong-chang, LIAO Lin-can. Auto mesh algorithm of the finite cover system in the numerical manifold method[J]. **Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)**, 2000, 23(1): 28-31.
- [21] 曹文贵, 速宝玉. 流形元覆盖系统自动形成方法之研究[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(2): 187-190.
- CAO Wen-gui, SU Bao-yu. A study on techniques of automatically forming of cover system of numerical manifold method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 23(2): 187-190.
- [22] 曹文贵, 唐学军. 岩石块体数值流形分析网格形成方法之研究[J]. 土木工程学报, 2003, 36(2): 81-85.
- CAO Wen-gui, TANG Xue-jun. Study on automatic mesh generation to numerical manifold method for rock block system[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2003, 36(2): 81-85.
- [23] 蔡永昌, 朱合华, 夏才初. 流形方法覆盖系统自动生成算法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2004, 32(5): 585-590.
- CAI Yong-chang, ZHU He-hua, XIA Cai-chu. Automatically forming of cover system in numerical manifold method[J]. **Journal of Tongji University (Natural Science Edition)**, 2004, 32(5): 585-590.
- [24] 陈刚, 刘佑荣. 流形元覆盖系统的有向图遍历生成算法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 711-716.
- CHEN Gang, LIU You-rong. Generation of cover system for numerical manifold in travel theory of the oriented graph[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(5): 711-716.
- [25] 韩有民, 罗先启, 王水林, 等. 裂纹扩展时物理覆盖与流形单元的生成算法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(6): 662-666.
- HAN You-min, LUO Xian-qi, WANG Shui-lin, et al. Formation algorithm of covers and manifold elements in NMM during propagation of cracks[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(6): 662-666.
- [26] 徐栋栋, 杨永涛, 郑宏, 等. 基于环路更新的物理覆盖和接触环路生成算法[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(10): 1865-1875.
- XU Dong-dong, YANG Yong-tao, ZHENG Hong, et al. Algorithm for generation of physical cover and contact loops based on loop updating[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(10): 1865-1875.
- [27] 苏海东, 付志, 颜志强. 基于任意网格划分的二维自动计算[J]. 长江科学院院报, 2020, 37(7): 160-166.
- SU Hai-dong, FU Zhi, XIE Zhi-qiang. Automatic two-dimensional computation based on arbitrary mesh division[J]. **Journal of Yangtze River Scientific Research Institute**, 2020, 37(7): 160-166.
- [28] 张友良, 莫思阳. 数值流形法覆盖系统并行生成算法研究[J]. 长江科学院院报, 2020, 37(10): 1-8.
- ZHANG You-liang, MO Si-yang. Parallel algorithm of cover system generation in numerical manifold method[J]. **Journal of Yangtze River Scientific Research Institute**, 2020, 37(10): 1-8.
- [29] 张奇华, 邬爱清. 随机结构面切割下的全空间块体拓扑搜索一般方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(10): 2043-2048.
- ZHANG Qi-hua, WU Ai-qing. General methodology of spatial block topological identification with stochastic discontinuities cutting[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(10): 2043-2048.
- [30] 张奇华. 基于块体加与块体减算法的岩石块体几何形态分析[J]. 水利学报, 2006, 37(4): 418-424.
- ZHANG Qi-hua. Morphological analysis of rock blocks by block adding-subtracting method[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2006, 37(4): 418-424.
- [31] 杨石扣, 任旭华, 张继勋. 基于布尔运算的复杂块体几何形态分析一般方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(12): 3576-3582.
- YANG Shi-kou, REN Xu-hua, ZHANG Ji-xun. A general method for geometric morphological analysis of complex blocks using Boolean operations[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(12): 3576-3582.
- [32] SHI G H. Producing joint polygons, cutting joint blocks and finding key blocks for general free surfaces[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(11): 2161-2170.